Université Cadi Ayyad
Faculté poly-disciplinaire de Safi
Département de Mathématiques et Informatique

Année Universitaire : 2019 – 2020
Filières : SMA & SMI
Semestre : S2
Module : Algèbre 3

Série N° 3

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 3.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Donner la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\forall M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(A)$.
2. Montrer que $\forall N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(AN) = \mathrm{rg}(A)$.
3. En déduire que $\forall M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}), \forall N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(MAN) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$f(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(f - Id)$.

3. Donner un vecteur c tel que $\ker(f) = \text{vect(c)}$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Montrer que $\text{Im}(f)$=$\ker(f - Id)$.
7. Montrer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6. (Facultatif)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique

$$B = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et soit φ l'endomorphisme de E défini pour tout élément $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de E par :

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{21} - a_{22} & a_{11} + a_{21} - a_{22} \\ -a_{11} + a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $M = \text{Mat}(\varphi, B)$.
2. Montrer que φ n'est pas un automorphisme de E.
3. Déterminer le rang de φ.
4. Soient $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\varphi(M_3)$ et $\varphi(M_4)$.
5. Déterminer $\ker(\varphi)$.
6. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $C = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de E.
7. Déterminer la matrice de passage Q de C à B.
8. Déterminer $N = \text{Mat}(\varphi, C)$.
9. Montrer que $E = \ker(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$.

Université Cadi Ayyad
Faculté poly-disciplinaire de Safi
Département de Mathématiques et Informatique

Année Universitaire : 2019 – 2020
Filières : SMA & SMI
Semestre : S2
Module : Algèbre 3

Série N° 3

Exercice 1.

1. $(A+I_3)^3 = 0_3$.
2. $A^3+3A^2+3A+I_3 = 0_3$, donc A est inversible et on a $A^{-1} = -(A^2+3A+3I)$.

Exercice 2.

1. On a $A^2-3A+2I_2 = 0_2$. Comme $A.\left(-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2\right) = I_2$, alors $A^{-1} = -\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2$.
2. On a $X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$. Sachant que le reste de division euclidienne considérée est de la forme $aX+b$, en évaluant en 1 et 2, on détermine a et b et on obtient :
$$X^n = (X^2-3X+2)Q(X)+(2^n-1)X+2-2^n.$$
3. $A^n = (A^2-3A+2I_2)Q(A)+(2^n-1)A+(2-2^n)I_2 = (2^n-1)A+(2-2^n)I_2 = \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & 2-2^{n+1} \\ 3.2^n-3 & 3.2^n-2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg((X+1)P') \leq 1+2-1 = 2$. Donc, f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors on a :
$$\begin{array}{rcl} f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2) & = & (X+1)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)' \\ & = & \lambda_1(X+1)P_1'+\lambda_2(X+1)P_2' \\ & = & \lambda_1 f(P_1)+\lambda_2 f(P_2). \end{array}$$
Ainsi, f est une application linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On a :
$$\begin{array}{rclclcl} f(1) & = & (X+1)\times 0 & = & 0 & = & 0\times 1+0\times X+0\times X^2, \\ f(X) & = & (X+1)\times 1 & = & X+1 & = & 1\times 1+1\times X+0\times X^2, \\ f(X^2) & = & (X+1)\times 2X & = & 2X+2X^2 & = & 0\times 1+2\times X+2\times X^2. \end{array}$$
Donc,
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$
3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2(X+1)+\lambda_3(X+1)^2 = 0 & \Longleftrightarrow & \lambda_3X^2+(\lambda_2+2\lambda_3)X+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2+2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. . \end{array}$$
Donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre dans un espace de dimension 3 ($\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. On a

$$\begin{array}{lllllll} f(1) & = & (X+1)\times 0 & = & 0 & = & 0\times 1+0\times(X+1)+0\times(X+1)^2 \\ f(X+1) & = & (X+1)\times 1 & = & X+1 & = & 0\times 1+1\times(X+1)+0\times(X+1)^2 \\ f((X+1)^2) & = & (X+1)\times 2(X+1) & = & 2(X+1)^2 & = & 0\times 1+0\times(X+1)+2\times(X+1)^2 \end{array}$$

Donc,

$$C=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{array}{c} \\ 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(1+X) & f((1+X)^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

5. On a

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on montre par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$B^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

De plus, on sait que $B^0=I_3$.

6. La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, la deuxième et la troisième colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2. Ainsi, on a $\mathrm{rang}(f)=\mathrm{rang}(A)=2$.

7. La famille $(1,X,X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)$.
De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & f(\mathbb{R}_2[X])=f(\mathrm{Vect}(1,X,X^2))=\mathrm{Vect}(f(1),f(X),f(X^2)) \\ & = & \mathrm{Vect}(0,1+X,2X+2X^2)=\mathrm{Vect}(1+X,2X+2X^2). \end{array}$$

Puisque les deux vecteurs $1+X$ et $2X+2X^2$ ne sont pas proportionnels, alors la famille $(1+X,2+2X^2)$ est libre. Ainsi la famille $(1+X,2+2X^2)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(f)$.

8. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}_2[X])=\dim(\ker(f))+\mathrm{rang}(f).$$

Donc, on a

$$\dim(\ker(f))=\dim(\mathbb{R}_2[X])-\dim(\mathrm{Im}(f))=3-2=1.$$

De plus, comme $f(1)=0$, alors $1\in\ker(f)$. Ainsi, le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le polynôme constant 1.

Exercice 4

1. Soient $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $M\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Par définition du rang d'une matrice et les propriétés élémentaires du produit matriciel, on a

$$\mathrm{rang}(MA)=\mathrm{rang}(C_1(MA),\cdots,C_n(MA))=\mathrm{rang}(MC_1(A),\cdots,MC_n(A)),$$

avec $C_1(MA), \cdots, C_n(MA)$ et $C_1(A), \cdots, C_n(A)$ sont respectivement les vecteurs colonnes des matrices MA et A.
Par suite, on considère l'endomorphisme φ défini sur l'espace des matrices colonnes par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longrightarrow & MX \end{array}$$

On peut vérifier facilement que φ est un isomorphisme. On a donc

$$\text{rang}(MA) = \text{rang}(MC_1(A), \cdots, MC_n(A)) = \text{rang}(\varphi(C_1(A)), \cdots, \varphi(C_n(A))) = \text{rang}(A),$$

vu que, si $f : E \to F$ est un isomorphisme (application linéaire bijective), alors l'image de toute base E est une base de F.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $N \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{rang}(AN) = \text{rang}(C_1(AN), \cdots, C_n(AN)) = \text{rang}(AC_1(N), \cdots, AC_n(N)).$$

On rappelle que

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(A) & \cdots & C_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 C_1(A) + \cdots + \lambda_n C_n(A) \in \text{Vect}(C_1(A), \cdots, C_n(A)).$$

Ainsi, on en déduit que $\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ AC_j(N) \in \text{Vect}(C_1(A), \cdots, C_n(A))$.
Ceci entraîne

$$\text{rang}(AC_1(N), \cdots, AC_n(N)) \leq \dim(\text{Vect}(C_1(A), \cdots, C_n(A))) = \text{rang}(C_1(A), \cdots, C_n(A)).$$

On a donc prouvé que $\text{rang}(AN) \leq \text{rang}(A)$.
Par suite, on applique la même inégalité à AN dans le rôle de A et N^{-1} dans celui de N, la matrice N est supposée inversible. On obtient alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}((AN)N^{-1}) \leq \text{rang}(AN).$$

3. Il découle immédiatement des deux questions précédentes.

Exercice 5.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\begin{array}{rclclcl} f(e_1) & = & (0,2,1) & = & 0.(1,0,0) + 2.(0,1,0) + 1.(0,0,1) & = & 0.e_1 + 2.e_2 + 1.e_3 \\ f(e_2) & = & (1,-1,-1) & = & 1.(1,0,0) - 1.(0,1,0) - 1.(0,0,1) & = & 1.e_1 - 1.e_2 - 1.e_3 \\ f(e_3) & = & (-2,4,3) & = & -2.(1,0,0) + 4.(0,1,0) + 3.(0,0,1) & = & -2.e_1 + 4.e_2 + 3.e_3. \end{array}$$

Donc la matrice de f dans la base canonique est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée au vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(f - Id) \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \iff x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\iff x_1 = x_2 - 2x_3.$$

Donc $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-2,0,1)$. On pose $a = (1,1,0)$ et $b = (-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $\ker(f - Id)$, c'est une base de $\ker(f - Id)$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée au vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(f) \iff AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Donc $x = (x_1, x_2, x_3) = (-x_3, 2x_3, x_3) = x_3(-1,2,1)$, si on pose $c = (-1,2,1)$ alors $\ker(f) = \mathrm{Vect}(c)$.

4. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 &\iff \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(-2,0,1) + \lambda_3(-1,2,1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2\lambda_3 + 2\lambda_3 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Donc la famille (a,b,c) est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = \mathrm{card}(\mathcal{B}') = 3$, alors la famille $\mathcal{B}' = (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Comme $a, b \in \ker(f - Id)$ et $c \in \ker(f)$, alors $f(a) - a = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(b) - b = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(c) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or, ceci entraîne que

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 \times a + 0 \times b + 0 \times c \\ f(b) &= 0 \times a + 1 \times b + 0 \times c \\ f(c) &= 0 \times a + 0 \times b + 0 \times c. \end{aligned}$$

Donc,

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. La famille (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(a,b,c)$. De plus, on a

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^3) = f(\mathrm{Vect}(a,b,c)) = \mathrm{Vect}(f(a), f(b), f(c)) = \mathrm{Vect}(a,b,0) = \mathrm{Vect}(a,b) = \ker(f - Id).$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) &\iff \begin{cases} x \in \ker(f) \\ x \in \mathrm{Im}(f) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \ker(f) \\ x \in \ker(f - Id) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f(x) = x \end{cases} \iff x = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

D'où, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Donc les deux sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

1. On a

$$\begin{aligned} \varphi(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} - E_{21} \\ \varphi(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21} \\ \varphi(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{12} \\ \varphi(E_{22}) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} - E_{12} \end{aligned}$$

Donc,

$$M = \mathrm{Mat}_B(\varphi) = \begin{array}{c} \\ E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. D'après la première question, on a $\varphi(E_{22}) = -\varphi(E_{21}) = \varphi(-E_{21})$. Comme $E_{22} \neq -E_{21}$, donc l'endomorphisme φ n'est pas injectif. Ainsi, φ n'est pas un automorphisme de E.
3. On a

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \varphi(\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})) = \mathrm{Vect}(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}), \varphi(E_{21}), \varphi(E_{22})).$$

Puisque $\varphi(E_{21}) = \varphi(E_{11}) + \varphi(E_{12})$ et $\varphi(E_{22}) = -\varphi(E_{11}) - \varphi(E_{12})$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$. Il est clair que la famille $(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. De plus, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi(E_{11}) + \lambda_2 \varphi(E_{12}) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} &\implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Donc la famille $(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$ est base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Ainsi, $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$.
4. Soient $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\varphi(M_3) = \varphi(M_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Comme $\varphi(M_3) = \varphi(M_4) = 0$, donc $M_3, M_4 \in \ker(\varphi)$. De plus, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 M_3 + \lambda_2 M_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} &\implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\ker(\varphi)$. D'autre part, comme $\text{rang}(\varphi) = 2$, alors d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \text{rang}(\varphi) = 2$. Ainsi, il en résulte que (M_3, M_4) est base de $\ker(\varphi)$. Or, cela signifie que $\ker(\varphi) = \text{Vect}(M_3, M_4)$.

6. Comme $\text{Card}(C) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, alors pour montrer que C est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que C est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi, C est une famille libre.

7. Soit Q la matrice de passage de C à B. Alors $Q = \text{Mat}(\text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, B, C)$.
D'autre part, on a

$$\begin{cases} M_1 &= E_{11} + E_{12} \\ M_2 &= E_{12} - E_{21} \\ M_3 &= E_{21} + E_{22} \\ M_4 &= E_{11} + E_{12} + E_{22} \end{cases} \implies \begin{cases} E_{22} &= M_4 - M_1 \\ E_{21} &= M_1 + M_3 - M_4 \\ E_{12} &= M_1 + M_2 + M_3 - M_4 \\ E_{11} &= -M_2 - M_3 + M_4 \end{cases}$$

Donc,

$$Q = \text{Mat}(\text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, B, C) = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

8. On a

$$\begin{aligned} \varphi(M_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_1 \\ \varphi(M_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -M_2 \\ \varphi(M_3) &= 0 \\ \varphi(M_4) &= 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$N = \text{Mat}(\varphi, C) = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(M_1) & \varphi(M_2) & \varphi(M_3) & \varphi(M_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$2^{\text{ème}}$ **méthode.** Soit $P_{B,C}$ la matrice de passage de B à C. Alors on a

$$N = P_{B,C}^{-1} M P_{B,C}.$$

De plus, on a

$$P_{B,C}^{-1} = (\text{Mat}(\text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, C, B))^{-1} = \text{Mat}(\text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, B, C) = Q.$$

D'autre part, comme

$$\begin{cases} M_1 &= E_{11} + E_{12} \\ M_2 &= E_{12} - E_{21} \\ M_3 &= E_{21} + E_{22} \\ M_4 &= E_{11} + E_{12} + E_{22}, \end{cases}$$

il en résulte que

$$P_{B,C} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, C, B) = \begin{array}{c} \\ E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

D'où,

$$N = \mathrm{Mat}(\varphi, C) = QMP_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors on a

$$M \in \ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \Longleftrightarrow M \in \ker(\varphi) \text{ et } M \in \mathrm{Im}(\varphi).$$

D'une part, on a $\varphi(M_1) = M_1, \varphi(M_2) = -M_2$ et (M_1, M_2) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$, alors la famille (M_1, M_2) est une base $\mathrm{Im}(\varphi)$. Donc, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$.
D'autre part, comme (M_3, M_4) est une base $\ker(\varphi)$ et $M \in \ker(\varphi)$, alors il existe $M = \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4$. Ainsi, on obtient $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 - \lambda_3 M_3 - \lambda_4 M_4 = 0$ et comme $C = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une famille libre, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. D'où, $\ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)).$$

Donc les deux sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.